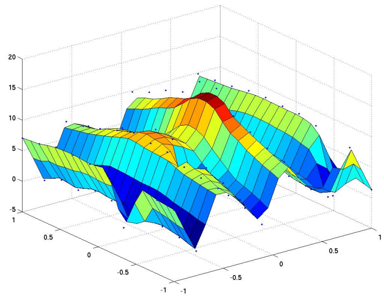
LICEO LINGUISTICO "NINNI CASSARÁ"

*Classe VA*

# Studio di Funzioni

prof. Alessio Cangemi



Di seguito saranno schematizzati gli step fondamentali per tracciare il grafico probabile di una funzione $f(x)$.

## 1 Ricerca del dominio

Per determinare il dominio di una funzione è necessario seguire alcune semplici regole:

- le operazioni di **addizione**, **sottrazione** e **moltiplicazione** sono sempre consentite (le **funzioni polinomiali** hanno $\mathbb{R}$ come dominio);
- l'operazione di **divisione** ha senso solo se il divisore non è nullo (le **funzioni razionali fratte** hanno come dominio l'insieme dei numeri reali escluso i punti che eventualmente annullano il denominatore);
- l'operazione di **estrazione di radice di indice pari** è definita solo se il radicando (l'espressione sotto il segno di radice) è positivo o nullo;
- l'operazione di **estrazione di radice di indice dispari** è definita ovunque purchè esista il radicando.

A titolo esemplificativo nella tabella seguente si riportano alcuni esempi di dominio delle funzioni appena elencate.

| **Funzione** | **Dominio** |
|---|---|
| $f(x) = x^3 - x + 5$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = 1/x$ | $\mathbb{R} - \{0\}$ |
| $f(x) = \sqrt[4]{x}$ | $[0, +\infty)$ |
| $f(x) = \sqrt[5]{x}$ | $\mathbb{R}$ |

Tabella 1: Esempi di domini di funzioni

## 2 Simmetrie

Una funzione può presentare alcune simmetrie che possono essere vantaggiose nello studio del grafico. Sia $y = f(x)$ una funzione avente dominio $D_f$.

- Se si verifica che

  $$f(x) = f(-x), \text{ per ogni } x \in D_f$$

  la funzione si dice **pari** e il suo grafico risulta simmetrico rispetto all'asse $y$. Per tali funzioni è sufficiente studiare l'andamento solo per le $x$ positive o solo per le $x$ negative e tracciare il grafico nella parte restante simmetricamente all'asse $y$.

- Se si verifica che

  $$f(x) = -f(-x), \text{ per ogni } x \in D_f$$

  la funzione si dice **dipari** e il suo grafico risulta simmetrico rispetto all'origine. Per tali funzioni è sufficiente studiare l'andamento solo per le $x$ positive o solo per le $x$ negative e tracciare il grafico nella parte restante simmetricamente all'origine degli assi $O$.

## 3 Intersezione con gli assi

Dopo aver determinato il dominio di una funzione e aver effettuato uno studio delle simmetrie, il passo successivo consiste nel determinare gli eventuali punti di intersezione del suo grafico con gli assi cartesiani.

- Le ascisse dei punti di **intersezione con l'asse** $x$ si trovano risolvendo il seguente sistema:

  $$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \qquad \text{(equazione dell'asse } x\text{)} \end{cases}$$

  Per determinare tali punti è quindi sufficiente porre $y = 0$ nell'equazione che definisce la funzione e risolvere l'equazione $f(x) = 0$.

  **Esempio 1** *Se $y = x^2 - 4$ per trovare i punti di intersezione con l'asse $x$ basta risolvere l'equazione $x^2 - 4 = 0$, le cui soluzioni sono $x_{1,2} = \pm 2$. Pertanto il grafico della funzione ha due punti di intersezione con l'asse $x$ di coordinate $A(-2, 0)$ e $B(2, 0)$.*

  **Osservazione 1** *Una funzione può non avere intersezioni con l'asse $x$ oppure averne un numero finito o infinito.*

- Il **punto di intersezione con l'asse** $y$ esiste a condizione che la funzione sia definita per $x = 0$; per determinare l'ordintata del punto di intersezione basta risolvere il seguente sistema:

  $$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \qquad \text{(equazione dell'asse } y\text{)} \end{cases}$$

  Per determinare tale punto è sufficiente sostituire $x = 0$ nell'espressione analitica della funzione e quindi $y = f(0)$.

  **Esempio 2** *Se $y = x^2 - 4$ per trovare il punto di intersezione con l'asse $y$ basta sostituire $x = 0$, da cui si ricava $y = -4$. Pertanto il grafico della funzione ha un'intersezione con l'asse $y$ di coordinate $C(0, -4)$.*

# 4 Segno

Lo studio del **segno della funzione** permette di stabilire per quali valori di $x$ risulta $f(x) > 0$ e per quali $f(x) < 0$. Per effettuare lo studio del segno è sufficiente porre:

$$f(x) > 0$$

In tal modo si individuano gli intervalli in cui la funzione è **positiva** e quindi il suo grafico si trova "al di sopra" dell'asse $x$ e quelli in cui la funzione è **negativa** e quindi si trova "al di sotto" dell'asse $x$.

# 5 Continuità

**Definizione 1** *Una funzione $f(x)$ definita in un'intorno di un punto $x_0$ si dice continua $x_0$ se si verifica che:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

In altre parole una funzione $f(x)$ è continua in $x_0$ se:

(i) è definita in $x_0$, cioè esiste $f(x_0)$;

(ii) esistono finiti e uguali i limiti destro e sinistro, cioè

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \qquad \text{oppure semplicemente} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

(iii) il valore del limite è uguale al valore della funzione in $x_0$, cioè $l = f(x_0)$.

**Osservazione 2** *Se viene meno anche solo una di queste tre condizioni la funzione si dice **discontinua** in $x_0$.*

**Osservazione 3** *Per calcolare il limite di una funzione continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è sufficiente sostituire il valore a cui tende la $x$ nell'espressione analitica della funzione.*

Le funzioni razionali intere (o polinomiali) e le funzioni razionali fratte sono esempi di funzioni cosiddette elementari. Si può dimostrare che **le funzioni elementari sono continue in tutto il loro dominio**, cioè ovunque sono definite.

**Esempio 3** *La funzione $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ è continua nel suo dominio che è $\mathbb{R} - \{1\}$. In particolare poiché è continua per $x = 3$, si ha che:*

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2}{x-1} = f(3) = \frac{9}{2}$$

# 6 Ricerca degli asintoti

## 6.1 Asintoti verticali

Se si verifica che:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

si dice che la retta verticale di equazione $x = x_0$ è un **asintoto verticale destro** per la funzione. Analogamente se si verifica che:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

si dice che la retta verticale di equazione $x = x_0$ è un **asintoto verticale sinistro** per la funzione. Se infine si verifica che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

cioè se entrambi i limiti (destro e sinistro) per $x \to x_0$ tendono o a $+\infty$ o a $-\infty$, si dice che la retta verticale di equazione $x = x_0$ è un **asintoto verticale** per la funzione.

**Osservazione 4** *Per determinare gli eventuali asintoti verticali di una funzione bisogna calcolare i limiti della funzione agli estremi finiti degli intervalli che costituiscono il dominio.*

**Esempio 4** *Cerchiamo gli asintoti verticali della seguente funzione:*

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4x + 3}$$

*Il dominio della funzoine è* $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, +\infty)$*, quindi gli estremi finiti della funzione in questo caso sono:* $-3$ *e* $-1$*. Consideriamo pertanto i seguenti limiti:*

$$\lim_{x \to -3^-} f(x), \qquad \lim_{x \to -3^+} f(x), \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x), \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

*Per risolverli più agevolmente scomponiamo il denominatore. Poichè le soluzioni del polinomio a denominatore sono* $x_1 = -3$ *e* $x_2 = -1$ *si ha che*[1]*:* $x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$*. A questo punto è facile osservare ad esempio che:*

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x^2 + 1}{(x + 3)(x + 1)} = \left[\frac{10}{0^+}\right] = +\infty$$

*poichè quando* $x \to -3^-$ *si ha che* $(x+3) \to 0^-$ *e* $(x+1) \to -2$*, pertanto il prodotto* $(x+3)(x+1) \to 0^+$*. Allo stesso modo si può osservare che:*

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x^2 + 1}{(x + 3)(x + 1)} = \left[\frac{10}{0^-}\right] = -\infty$$

*poichè quando* $x \to -3^+$ *si ha che* $(x+3) \to 0^+$ *e* $(x+1) \to -2$*, pertanto il prodotto* $(x+3)(x+1) \to 0^-$*. Alla luce di questi risultati è possibile affermare che la funzione ha un asintoto verticale di equazione* $x = -3$*. Facendo considerazioni analoghe per gli altri due limiti, si può verificare che:*

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 + 1}{(x + 3)(x + 1)} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty \qquad e \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + 1}{(x + 3)(x + 1)} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

*Pertanto la funzione ha un altro asintoto verticale di equazione* $x = -1$*.*

### 6.2 Asintoti orizzontali

Se si verifica che:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l_1, \quad \text{con} \quad l_1 \in \mathbb{R}$$

si dice che la retta di equazione $y = l_1$ è un **asintoto orizzontale destro** per la funzione. Analogamente se si verifica che:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l_2, \quad \text{con} \quad l_2 \in \mathbb{R}$$

si dice che la retta di equazione $y = l_2$ è un **asintoto orizzontale sinistro** per la funzione. Se infine entrambi i limiti (per $x \to \pm\infty$) sono finiti e tendono allo stesso valore $l \in \mathbb{R}$ si dice che la funzione ha un **asintoto orizzontale** di equazione $y = l$.

**Osservazione 5** *Per determinare gli eventuali asintoti orizzontali di una funzione bisogna calcolare i limiti della funzione agli estremi infiniti degli intervalli che costituiscono il dominio.*

[1] In generale se un polinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$ è scomponibile (se cioè vale che $\Delta \geq 0$), il polinomio si può scomporre come:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

dove $x_1$ e $x_2$ sono le soluzioni (distinte o coincidenti) dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ associata al polinomio.

**Esempio 5** *Cerchiamo gli asintoti orizzontali della seguente funzione:*

$$y = \frac{x^2+1}{x^2+4x+3}$$

*Poichè in generale il limite per $x \to \infty$ di una funzione razionale fratta è uguale al limite del rapporto tra il termine di grado massimo del numeratore e il termine di grado massimo del denominatore, si ha che:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \qquad e \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

*Pertanto la funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$.*

## 6.3 Asintoti obliqui

Una funzione che NON ha asintoti orizzontali può ammettere asintoti obliqui. In altre parole **la presenza di asintoti orizzontali esclude la presenza di asintoti obliqui**.
In generale si dice che una funzione $f(x)$ ha un **asintoto obliquo destro** di equazione $y = mx + q$, se valgono le seguenti condizioni:

$$\text{(i)} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \text{con} \quad m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\text{(ii)} \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = q, \quad \text{con} \quad q \in \mathbb{R}$$

Analogamente se le condizioni (i) e (ii) valgono per $x \to -\infty$, si dice che la funzione ha un **asintoto obliquo sinitro**.

**Osservazione 6** *Per le funzioni razionali fratte si può dimostrare che l'asintoto obliquo esiste se e soltanto se il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore.*

**Esempio 6** *La funzione dell'esempio precedente ammette un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ quindi non può avere asintoti obliqui. Il suo grafico è il seguente:*

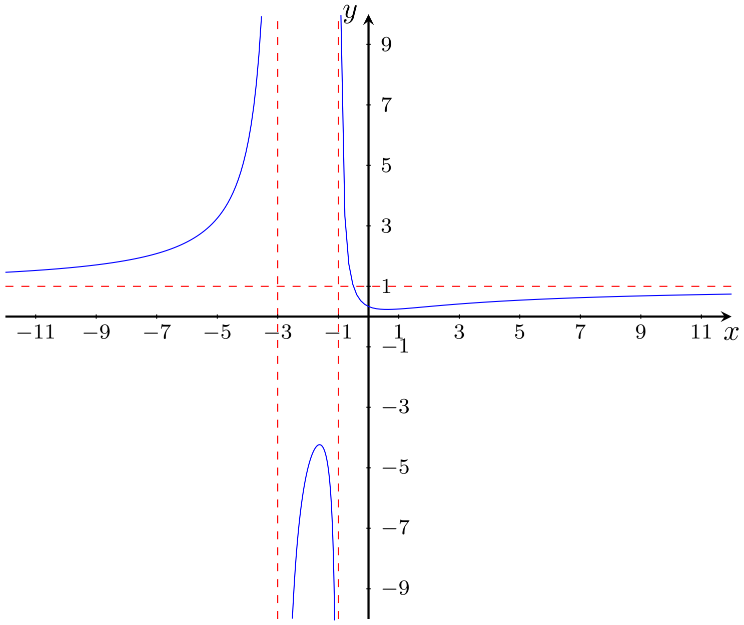



Figura 1: Grafico della funzione $y = \frac{x^2+1}{x^2+4x+3}$

## Riferimenti bibliografici


[1] Leonardo Sasso. *Nuova matematica a colori*. Edizione azzurra Volume 5. Petrini. 2012.

[2] M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi. *Matematica.azzurro*. Volume 5. Zanichelli. 2013.

[3] P. Marcellini, C. Sbordone. *Analisi Matematica Volume 1*. Liguori. 2015.